Вестник Тюменского государственного университета.
2014. № 7. Физико-математические науки. Информатика. 74-82

© **С.Л. ДЕРЯБИН, А.В. МЕЗЕНЦЕВ**

Уральский государственный университет путей сообщения (г. Екатеринбург)
SDeryabin@math.usurt.ru, AMezentsev@math.usurt.ru

УДК 517.95+533.6

*ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ СЖИМАЕМОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ВОЛН ЖИДКОСТИ**

TWO-DIMENSIONAL MODEL OF SOLID MEDIA TO DESCRIBE FLUID WAVES

АННОТАЦИЯ. Для описания распространения длинных волн используются многие модели уравнений мелкой воды. Заметим, что модели мелкой воды не позволяют получить распределений скорости и плотности жидкости по глубине. В данной работе для описания параметров волны использовалась двумерная модель газовой динамики для политропного газа с показателем политропы газа, равным 7.

Построены решения двух начально-краевых задач, которые описывают течение жидкости от поверхности дна до поверхности воды включительно. Построенное течение имеет внутри себя слабый разрыв и поэтому является кусочно-составным. Найдены граничные условия: на поверхности дна, поверхности воды и на слабом разрыве. Полученные граничные условия могут быть использованы при проведении численных расчетов.

SUMMARY. To describe the propagation of long waves many models of equations of shallow water are used. It should be mentioned, that the models of shallow water cannot provide us with depth distributions of velocity and density of the fluid. This research describes the parameters of the wave model of two-dimensional gas dynamics for the polytropic gas with gas politropy rate equal to 7. Solutions for the two of the initial-boundary value problems describing the current of the fluid from the surface of the bottom to the surface of water are provided. The current has a weak discontinuity within itself and it is, therefore, a piecewise component. Boundary conditions are found: on the bottom surface, on the water surface and on the weak discontinuity. The boundary conditions can be used for numerical calculations.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Двумерные течения, начально-краевые задачи, свободная поверхность, слабый разрыв, сходящиеся ряды.

KEY WORDS. Two-dimensional flows, initial-boundary value problems, free surface, weak discontinuity, converging series.

**Исследование проведено при поддержке РФФИ (проект № 11-01-00198) и Министерства образования и науки РФ (проект № 1.8490-2013)*

Для описания распространения длинных волн используются многие модели, от классических уравнений мелкой воды [1], [2] до полной модели идеальной жидкости [3], [4]. В работе [5] были проведены исследования для классических уравнений мелкой воды и получен закон движения границы уреза и значения скорости жидкости на ней. Однако замечено, что для детального моделирования явления на продолжительное время требуются модели, способные воспроизводить дисперсию и отражать неоднородность процесса. Считается, что этим условиям в моделях мелкой воды отвечают нелинейно-дисперсионные уравнения: Грина-Нагди, Железняка-Пелиновского, Алешникова [6]. Но система уравнений Грина-Нагди существенно сложнее классических уравнений мелкой воды и не является гиперболической. При ее исследовании возникают нетривиальные начально-краевые задачи, в частности, задача Коши для этой системы не имеет единственного решения. Кроме того, приближенные модели Грина-Нагди, Железняка-Пелиновского, Алешникова существенно сложнее точной модели газовой динамики.

В работе [7] для описания воды рассматривалась модель газовой динамики для политропного газа с показателем политропы γ=7. Представляется, что модель сжимаемой сплошной среды является адекватной физической природе жидкости и позволяет получить новые содержательные результаты.

В данной работе будет использоваться двумерная модель газовой динамики для изэнтропических течений политропного газа [8] с показателем политропы γ=7.

1. Постановка задачи.

Рассматривается плоский слой жидкости, ограниченный поверхностью «вода-воздух» и неподвижным непроницаемым дном. Предполагается, что жидкость находится в гравитационном поле, является сжимаемой и невязкой.

Далее будут сделаны два существенных предположения.

1. Будем считать, что для описания жидкости можно использовать уравнение состояния для давления политропного газа $p=\frac{S^2\rho^\gamma}{\gamma}$ с показателем политропы γ=7, S=const [7].

2. Свободная поверхности жидкости Γ_0 — это граница воды и воздуха.

Поскольку плотность воды существенно больше плотности воздуха, далее будет предполагаться, что на свободной поверхности Γ_0 плотность жидкости будет равна нулю во все моменты времени ($\rho(t, x, y, z)|_{\Gamma_0}$=0).

При численном моделировании течений, примыкающих к вакууму, на свободной границе значение плотности задается малым, но отличным от нуля. То есть фактически вместо границы газ-вакуум ищется слабый контактный разрыв. В данной работе происходит обратная ситуация вместо контактного разрыва вода-суша ищется граница газ-вакуум.

Эти предположения делают используемую модель приближенной.

Двумерные течения рассматриваемой жидкости описываются системой [8]

$$\begin{aligned} &c_t+c_xu_1+c_yu_2+3c(u_{1x}+u_{2y})=0,\\ &u_{1t}+u_{1x}u_1+u_{1y}u_2+\tfrac{1}{3}cc_x=0,\\ &u_{2t}+u_{2x}u_1+u_{2y}u_2+\tfrac{1}{3}cc_y=-g, \end{aligned} \qquad (1.1)$$

где g — ускорение свободного падения, $c=S\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$ — скорость звука газа, u_1, u_2 — проекции вектора скорости в декартовой системе координат x, y; S−$const$.

Пусть поверхность непроницаемого дна Г задается параметрически

$$\mathbf{r}=\{x, y\}=\Phi(\xi)=\{\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)\}.$$

Здесь $\mathbf{r}=\{x, y\}$ — радиус-вектор произвольной точки пространства.

Граница «вода-воздух» Γ_0 в начальный момент времени $t=t_0$ задается уравнением $\eta=\eta_0(\xi)$.

В системе (1.1) делается переход от декартовых координат x, y к новым ортогональным криволинейным координатам η, ξ. Здесь ξ — параметр, с помощью которого задается исходная поверхность Г а η — расстояние от поверхности Г до произвольной точки пространства, измеряемое по нормали к Г. Формулы перехода от переменных x, y к координатам η, ξ имеют вид

$$\mathbf{r}=\Phi(\xi)+\eta\,\mathbf{n}(\xi)=\{\varphi_1(\xi)+\eta\, n_1(\xi),\ \varphi_2(\xi)+\eta\, n_2(\xi)\}.$$

Здесь $\mathbf{n}=\{n_1, n_2\}$ — единичный нормальный вектор к поверхности Г.

Якобиан преобразования равен $J=x_\xi n_2-y_\xi n_1$. Если $|\Phi_\xi|\neq 0$ в точке ($\xi=\xi^0$), на поверхности Г (при $\eta=0$), то эта точка не является особой точкой поверхности Г. В дальнейшем это предполагается выполненным. Тогда якобиан преобразования J будет отличен от нуля в данной точке и в некоторой ее окрестности.

Обозначив $|\Phi_\xi|=B(\xi)$, перепишем систему (1.1) в новых независимых переменных

$$\begin{aligned}
&c_t+c_\eta u+\frac{1}{A}c_\xi v+3c[u_\eta+\frac{A_\eta}{A}u+\frac{1}{A}v_\xi]=0,\\
&u_t+u_\eta u+\frac{1}{A}u_\xi v-\frac{A_\eta}{A}v^2+\frac{1}{3}cc_\eta=-\frac{1}{B}g\varphi_2,\\
&v_t+v_\eta u+\frac{1}{A}v_\xi v+\frac{A_\eta}{A}uv+\frac{1}{3A}cc_\xi=\frac{1}{B}g\varphi_1
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости газа на координатные оси η, ξ соответственно, а A — коэффициент Ляме H_2

$$H_1=|\mathbf{R}_\eta|=1,\quad H_2=A=|\mathbf{R}_\xi|=|\Phi_\xi|(1-k\,\eta).$$

Если ввести кривизну линии Г, то выполняется следующее соотношение: $\mathbf{n}_\xi=-k\,\Phi_\xi$, где $k(\xi)$ — значение кривизны линии Г [9]. Вычисляя коэффициент Ляме, с учетом этого соотношения получим $A=B(1-k\,\eta)$.

Заметим, что $A_\eta=-kB$, $\dfrac{A_\eta}{A}=\dfrac{-k}{1-k\eta}$ причем: на линии Г ($\eta=0$) - $\dfrac{A_\eta}{A}=-k$; на линии Γ_0 ($\eta=\eta_0(t,\xi)$) - $\dfrac{A_\eta}{A}=\dfrac{-k}{1-k\eta_0(t,\xi)}$.

Коэффициент Ляме обращается в ноль только в тех точках пространства, в которых $\eta=\dfrac{1}{k}$, то есть когда η равна радиусу кривизны исходной линии Г, когда от точки на исходной поверхности отошли вдоль нормали в направлении увеличения η на расстояние, равное радиусу кривизны. В начальный момент времени $t=t_0$ на линии Г $A\neq 0$. Далее будет предполагаться, что и на линии Γ_0 $A\neq 0$.

Для системы (1.2) задаются начальные условия:

$$c_0(t_0,\ \xi,\ \eta)=c_0(\xi,\ \eta),\ u(t_0,\ \xi,\ \eta)=u_0(\xi,\ \eta),\ (u_0(\xi,\ 0)=0),\ v(t_0,\ \xi,\ \eta)=v_0(\xi,\ \eta). \quad (1.3)$$

В данной работе не будет рассматриваться выход волны на берег, поэтому предполагается, что $c_0(\xi,\ 0)\neq 0$. Функции c_0, u_0, v_0, φ_1, φ_2, η_0 предполагаются аналитическими.

Будет рассматриваться следующая конфигурация течения. Фоновое течение через свободную поверхность Γ_0, примыкает к вакууму. В момент времени $t=t_0$ от непроницаемого дна по фоновому течению начинает распространяться звуковая характеристика Γ_1. Требуется решить следующие задачи:

1. Построить фоновое течение через свободную поверхность Γ_0, примыкающее к вакууму.
2. Найти свободную поверхность Γ_0 и значения параметров жидкости на нем.
3. Найти звуковую характеристику Γ_1 и значения параметров жидкости на ней.
4. Построить течение, лежащее между звуковой характеристикой Γ_1 и непроницаемым дном.

2. Построение фонового течения в окрестности границы Γ_0.

В системе (1.2) введем новую независимую переменную $\theta=\eta-\eta_0(t,\ \xi)$, где $\eta=\eta_0(t,\ \xi)$ неизвестный закон движения свободной поверхности Γ_0. Перепишем систему (1.2) в новых независимых переменных

$$\begin{gathered} c_t+\Big(u-\frac{1}{B(1-k(\theta+\eta_0))}\eta_{0\xi}v-\eta_{0t}\Big)c_\theta+\frac{1}{B(1-k(\theta+\eta_0))}c_\xi v+3c\Big[u_\theta- \\ -\frac{k}{1-k(\theta+\eta_0)}u+\frac{1}{B(1-k(\theta+\eta_0))}(v_\xi-\eta_{0\xi}v_\theta)\Big]=0, \end{gathered} \quad (2.1)$$

$$u_t+\Big(u-\frac{1}{B(1-k(\theta+\eta_0))}\eta_{0\xi}v-\eta_{0t}\Big)u_\theta+\frac{1}{B(1-k(\theta+\eta_0))}u_\xi v+\frac{k}{1-k(\theta+\eta_0)}v^2+\frac{1}{3}cc_\theta=-\frac{1}{B}g\varphi_2,$$

$$v_t+\Big(u-\frac{1}{B(1-k(\theta+\eta_0))}\eta_{0\xi}v-\eta_{0t}\Big)v_\theta+\frac{1}{B(1-k(\theta+\eta_0))}v_\xi v-\frac{k}{1-k(\theta+\eta_0)}uv+$$

$$+\frac{1}{3B(1-k(\theta+\eta_0))}c(c_\xi-\eta_{0\xi}c_\theta)=\frac{1}{B}g\varphi_1.$$

Для системы (2.1) имеем условия при $t=t_0$:

$$c(t_0,\xi,\theta)=c(\xi,\ \theta+\eta_0(\xi)),\ u(t_0,\xi,\theta)=u(\xi,\ \theta+\eta_0(\xi)),\ v(t_0,\xi,\theta)=v(\xi,\ \theta+\eta_0(\xi)), \quad (2.2)$$

а также условие на свободной поверхности Γ_0, т.е. при $\theta=0$:

$$c(t,\ \xi,\ 0)=0. \quad (2.3)$$

Для того чтобы решить поставленную начально-краевую задачу (2.1)-(2.3), необходимо, в частности, найти закон движения свободной поверхности Γ_0 (т.е. найти функцию $\eta=\eta_0(t,\xi)$), а также значения газодинамических параметров на ней. Для этого в системе (2.1) положим $\theta=0$ и, учитывая условие (2.3), получим:

$$\begin{gathered} \eta_{0t}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}v_0\eta_{0\xi}=u_0, \qquad u_{0t}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}v_0u_{0\xi}+\frac{k}{1-k\eta_0}v_0^2=-\frac{1}{B}g\varphi_2, \\ v_{0t}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}v_0v_{0\xi}-\frac{k}{1-k\eta_0}u_0v_0=\frac{1}{B}g\varphi_1. \end{gathered} \quad (2.4)$$

Из условий (2.2) при подстановке η=0 получаются начальные условия для системы (2.4)

$$c(t_0,\xi)=c_0(\xi,\ \eta_0(\xi)),\quad u(t_0,\xi)=u_0(\xi,\ \eta_0(\xi)),\quad v(t_0,\xi)=v_0(\xi,\ \eta_0(\xi)). \tag{2.5}$$

Поскольку система (2.4) — аналитическая и начальные условия (2.5) задаются аналитическими функциями, то по теореме Ковалевской [10] задача (2.4)-(2.5) имеет единственное аналитическое решение.

$$\eta_0=\eta_{00}(t,\xi),\quad u_0=u_{00}(t,\xi),\quad \mathrm{v}_0=v_{00}(t,\xi). \tag{2.6}$$

Теперь для системы (2.1), используя решение (2.6), ставим другую начально-краевую задачу — задачу с данными на свободной поверхности Γ_0 (θ=0)

$$c(t,\xi,0)=0,\quad u(t,\xi,0)=u_{00}(t,\ \xi),\quad v(t,\xi,0)=v_{00}(\mathrm{t},\ \xi). \tag{2.7}$$

и с начальными условиями (2.2).

Теорема 1.

Существует $t_* > t_0$ такое, что при $t_0 \le t \le t_*$ в некоторой окрестности Γ_0 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (2.1),(2.2), (2.7).

Для конструктивного представления решения задачи (2.1), (2.2), (2.7), разложим его в ряд по степеням θ:

$$\mathbf{q}(t,\xi,\theta)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{q}_k(t,\xi)\frac{\theta^k}{k!},\ \mathbf{q}=\{c,u,v\}. \tag{2.8}$$

В системе (2.1) положим θ=0 и, учитывая (2.7), получим тождество.

Продифференцируем систему (2.1) по θ k раз, положим θ=0 и, учитывая уже найденные коэффициенты ряда (2.8), будем иметь

$$\begin{gathered}
c_{kt}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}v_0c_{k\xi}+(k+3)(u_1-\frac{1}{B(1-k\eta_0)}\eta_{0\xi}v_1)c_k+\\
+(3k+1)(u_k-\frac{1}{B(1-k\eta_0)}\eta_{0\xi}v_k)c_1+(\frac{3}{B(1-k\eta_0)}v_{0\xi}-\frac{k}{B(1-k\eta_0)^2}\eta_{0\xi}v_0-\frac{3k}{1-k\eta_0}u_0)c_k=F_{1k}(t,\xi),\\
u_{kt}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}v_0u_{k\xi}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}u_{0\xi}v_k+k(u_1-\frac{1}{B(1-k\eta_0)}\eta_{0\xi}v_1)u_k+\\
+(u_k-\frac{1}{B(1-k\eta_0)}\eta_{0\xi}v_k)u_1+\frac{2k}{1-k\eta_0}v_0v_k+\frac{1}{3}(k+1)c_1c_k=F_{2k}(t,\xi),\\
v_{kt}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}v_0v_{k\xi}+\frac{1}{B(1-k\eta_0)}v_{0\xi}v_k+k(u_1-\frac{1}{B(1-k\eta_0)}\eta_{0\xi}v_1)v_k+\\
+(u_k-\frac{1}{B(1-k\eta_0)}\eta_{0\xi}v_k)v_1-\frac{k}{1-k\eta_0}u_kv_0-\frac{k}{1-k\eta_0}u_0v_k-\frac{1}{3}\eta_{0\xi}(k+1)c_1c_k=F_{3k}(t,\xi).
\end{gathered} \tag{2.9}$$

Функции $F_{ik}(t,\xi)$, $1 \le i \le 3$ известным образом зависят от уже найденных коэффициентов ряда (2.8) $\mathbf{q}_l$, $l<k$ и ввиду громоздкости здесь не приводятся. Единственное решение систем (2.9) получается при задании начальных условий $\mathbf{q}_k(t_0,\xi)$, которые однозначно определяются при разложении в ряд по степеням θ условий (2.2).

3. Построение течения между звуковой характеристикой Γ_1 и непроницаемым дном.

Для построения решения в данной области необходимо поставить новую начально-краевую задачу. Решение, построенное в пункте 2, обозначим $c=c_ф(t,\ \xi,\ \eta)$, $u=u_ф(t,\ \xi,\ \eta)$, $v=v_ф(t,\ \xi,\ \eta)$.

Для определения Γ_1 в системе (1.2) введем новую независимую переменную $\mu = \eta - \eta_1(t,\ \xi)$, где $\eta = \eta_1(t,\ \xi)$ — неизвестный закон движения звуковой характеристики Γ_1. В новых переменных уравнение Γ_1 имеет вид $\mu = 0$.

Система (1.2) перепишется в виде

$$\begin{gathered}
c_t + \Big(u - \frac{1}{B(1-k(\mu+\eta_1))}\eta_{1\xi}v - \eta_{1t}\Big)c_\mu + \frac{1}{B(1-k(\mu+\eta_1))}c_\xi v + 3c\Big[u_\mu - \\
-\frac{k}{1-k(\mu+\eta_1)}u + \frac{1}{B(1-k(\mu+\eta_1))}(v_\xi - \eta_{1\xi}v_\mu)\Big] = 0, \\
u_t + \Big(u - \frac{1}{B(1-k(\mu+\eta_1))}\eta_{1\xi}v - \eta_{1t}\Big)u_\mu + \frac{1}{B(1-k(\mu+\eta_1))}u_\xi v + \frac{k}{1-k(\mu+\eta_1)}v^2 + \frac{1}{3}cc_\mu = -\frac{1}{B}g\varphi_2, \\
v_t + \Big(u - \frac{1}{B(1-k(\mu+\eta_1))}\eta_{1\xi}v - \eta_{1t}\Big)v_\mu + \frac{1}{B(1-k(\mu+\eta_1))}v_\xi v - \frac{k}{1-k(\mu+\eta_1)}uv + \\
+\frac{1}{3B(1-k(\mu+\eta_1))}c(c_\xi - \eta_{1\xi}c_\mu) = \frac{1}{B}g\varphi_1.
\end{gathered} \tag{3.1}$$

Из равенства нулю определителя перед выводящими с поверхности Γ_1 производными по переменной μ, получаем дифференциальное уравнение для определения $\eta=\eta_1(t,\ \xi)$

$$\eta_{1t} + \frac{1}{B(1-k\eta_1)}\eta_{1\xi}v_\phi - u_\phi = c_\phi\sqrt{1+\frac{\eta_{1\xi}^2}{B(1-k\eta_1)^2}},\quad \eta_1(t_0,\xi) = 0. \tag{3.2}$$

Поскольку функции, задающие фоновое течение, являются аналитическими, то задача (3.2) имеет единственное аналитическое решение $\eta=\eta_1(t,\ \xi)$. Подставляя полученное решение в фоновое течение, получаем для системы (1.2) аналитические условия на звуковой характеристике Γ_1

$$\begin{aligned}
c\,|_{\Gamma_1} &= c_\phi(t,\xi,\eta_1(t,\xi)) = c^0(t,\xi), \\
u\,|_{\Gamma_1} &= u_\phi(t,\xi,\eta_1(t,\xi)) = u^0(t,\xi), \\
v\,|_{\Gamma_1} &= v_\phi(t,\xi,\eta_1(t,\xi)) = v^0(t,\xi).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Характеристика Γ_1 имеет кратность один, поэтому для единственности решения задачи (1.2), (3.3) необходимо задать одно дополнительное условие. Этим условием будет являться условие непротекания жидкости через дно $\eta=0$.

$$u(t,\ \xi,\ 0)=0. \tag{3.4}$$

Теорема 2.

Существует $t_1>t_0$ такое, что при $t_0<t<t_1$ в некоторой окрестности Γ_1 существует единственное локально-аналитическое решение задачи (1.2), (3.3), (3.4).

Для конструктивного представления решения задачи (1.2), (3.3), (3.4) разложим его в ряд по степеням η

$$\mathbf{p}(t,\xi,\eta) = \sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{p}_k(t,\xi)\frac{\eta^k}{k!},\quad \mathbf{p} = \{c,\ u,\ v\}, \tag{3.5}$$

Заметим, что из условия (3.4) следует $u_0(t,\ \xi) = 0$.

В системе (1.2) положим η=0 и с учетом (3.4) получим

$$\begin{aligned} & c_{0t}+\frac{1}{B}c_{0\xi}v_0+3c_0[u_1+\frac{1}{B}v_{0\xi}]=0, \\ & kv_0^2+\frac{1}{3}c_0c_1=-\frac{1}{B}g\varphi_2, \\ & v_{0t}+\frac{1}{B}v_{0\xi}v_0+\frac{1}{3B}c_0c_{0\xi}=\frac{1}{B}g\varphi_1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Из первого и второго уравнений системы (3.6) получаем

$$u_1=-\frac{1}{3c_0}\left(c_{0t}+\frac{1}{B}c_{0\xi}v_0+\frac{1}{B}v_{0\xi}\right),\ c_1=-\frac{3}{c_0}\left(\frac{1}{B}g\varphi_2+kv_0^2\right).$$

Интегрируя третье уравнение системы (3.6) с учетом начальных условий (1.3), имеем v_0=$v_0(t,\ \xi,\ c_0(t,\ \xi))$.

Продифференцируем третье уравнение системы (1.2) по η, положим η =0, и с учетом (3.4), получим:

$$v_{1t}+\frac{1}{B}v_0v_{1\xi}+\left(u_1+\frac{1}{B}v_{0\xi}\right)v_1=-\frac{k}{B}v_{0\xi}v_0-\frac{1}{3B}c_1c_{0\xi}-\frac{1}{3B}c_0c_{1\xi}-\frac{k}{3B}c_0c_{0\xi}.$$

Начальные условия для этого уравнения получаются, если v_0 из условий (1.3) продифференцировать по η и положить η =0.

Интегрируя уравнение, имеем v_1=$v_1(t,\ \xi,\ c_0(t,\ \xi))$.

Продифференцируем первое и второе уравнения системы (1.2) k раз по η, а третье уравнение системы k+1, положим η =0 и с учетом (3.4), получим

$$\begin{aligned} & c_{kt}+kc_ku_1+\frac{1}{B}c_{k\xi}v_0+\frac{1}{B}c_{0\xi}v_k+3c_k[u_1+\frac{1}{B}v_{0\xi}]+3c_0[u_{k+1}-ku_k+\frac{1}{B}v_{k\xi}]=G_{1k}, \\ & u_{kt}+ku_ku_1+\frac{1}{B}u_{k\xi}v_0+\frac{1}{B}u_{0\xi}v_k+2kv_0v_k+\frac{1}{3}c_0c_{k+1}=G_{2k}, \\ & v_{(k+1)t}+\frac{1}{B}v_0v_{(k+1)\xi}+\left(ku_1+\frac{1}{B}v_{0\xi}\right)v_{k+1}+\frac{1}{3B}c_0c_{(k+1)\xi}+\frac{1}{3B}c_{k+1}c_{0\xi}=G_{3k}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Функции $G_{ik}(t,\ \xi)$, $1\le i\le 3$ известным образом зависят от уже найденных коэффициентов ряда (3.5) $\mathbf{p}_l$, $l<k$ и ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Из первого и второго уравнений системы (3.7) получаем

$$u_{k+1}=ku_k-\frac{1}{B}v_{k\xi}-\frac{1}{3c_0}(c_{kt}+\frac{1}{B}c_{k\xi}v_0+(k+3)u_1c_k+\frac{1}{B}v_{0\xi}c_k+\frac{1}{B}c_{0\xi}v_k-G_{1k}),$$

$$c_{k+1}=-\frac{3}{c_0}\left(u_{kt}+ku_ku_1+\tfrac{1}{B}u_{k\xi}v_0+\tfrac{1}{B}u_{0\xi}v_k+2kv_0v_k-G_{2k}\right).$$

Начальные условия для третьего уравнения системы (3.7) получаются, если v_0 из условий (1.3) k+1 раз продифференцировать по η и положить η=0.

Подставляя c_{k+1} в третье уравнение системы (3.7) и интегрируя уравнение, имеем v_{k+1}=$v_{k+1}(t,\ \xi,\ c_0(t,\ \xi))$.

Таким образом, построено решение (3.5), зависящее от функции $c_0(t,\ \xi)$ — распределение скорости звука на непроницаемом дне. Функцию $c_0(t,\ \xi)$ будем определять с помощью условий на звуковой характеристике (3.3) из равенства.

$$c^0(t,\ \xi)=c(t,\ \xi,\ \eta_1(t,\ \xi)). \tag{3.8}$$

Разложим $c_0(t,\ \xi)$ в ряд по степеням $t-t_0$

$$c_0(t,\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbf{c}_{0k}(\xi)\frac{(t-t_0)^k}{k!}, \tag{3.9}$$

В равенстве (3.8) положим $t=t_0$, учитывая (3.2), (3.3), получим $c_{00}(\xi)=c^0(t_0,\ \xi)$.

Продифференцируем равенство (3.8) по t

$$c_t^0(t,\xi)=c_t(t,\xi,\eta_1(t,\xi))+c_\eta(t,\xi,\eta_1(t,\xi))\eta_{1t}(t,\xi),$$

положим $t=t_0$, учитывая (3.2), (3.3), будем иметь

$$c_{01}(\xi)=c_t^0(t_0,\xi)-c_1(t_0,\xi)[u_\phi(t_0,\xi,0)+c_\phi(t_0,\xi,0)],$$

Продифференцируем равенство (3.8) по t k раз

$$c_t^{0(k)}(t,\xi)=c_t^{(k)}(t,\xi,\eta_1(t,\xi))+c_\eta^{(k)}(t,\xi,\eta_1(t,\xi))\eta_{1t}^k(t,\xi)+F_k(t,\xi), \tag{3.10}$$

Здесь F_k, — известная функция от коэффициентов ряда (3.5) $\mathbf{p}_n$, $n<k$ ее производных по t, а также функции η_1 и ее производных по t.

Положим в равенстве (3.10) $t=t_0$, и учитывая (3.2), (3.3), получим

$$c_{0k}(\xi)=c_t^{0(k)}(t_0,\xi)-c_k(t_0,\xi)[u_\phi(t_0,\xi,0)+c_\phi(t_0,\xi,0)]^k-F_k(t_0,\xi),$$

Таким образом, с помощью условий на звуковой характеристике (3.3) единственным образом определилась в виде ряда (3.9) неизвестная функция $c_0(t,\xi)$ и, следовательно, в виде ряда (3.5) единственное локально-аналитическое решение задачи (1.2), (3.3), (3.4). Также получены граничные условия на поверхности дна

$$c|_\Gamma=c_0(t,\xi),\quad u|_\Gamma=0,\quad v|_\Gamma=v_0(t,\xi,c_0(t,\xi)).$$

Заключение.

1. Построены решения двух начально-краевых задач, которые описывают течение жидкости от поверхности дна до поверхности воды включительно.

2. Построенное течение имеет внутри себя слабый разрыв и поэтому является кусочно-составным.

3. Получены граничные условия: на поверхности дна Г, поверхности воды Γ_0 и на слабом разрыве Γ_1. Эти граничные условия могут быть использованы при проведении численных расчетов.

Авторы благодарят С.П. Баутина за полезное обсуждение данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хакимзянов Г.С., Шокин Ю.И., Барахнин В.Б., Шокина Н.Ю. Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 394 с.

2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2003. 336 с.

3. Ковеня В.М., Яненко Н.Н. Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.

4. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.

5. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Соммер А.Ф., Хакимзянов Г.С. Исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности подвижной линии уреза // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. № 6. С. 19-41.

6. Федотова З.И., Хакимзянов Г.С. Нелинейно-дисперсионные уравнения мелкой воды на нестационарном дне // Вычислительные технологии. 2008. Т. 13. № 4. С. 114-126.

7. Нигматуллин Р.И., Болотнова Р.Х. Широкодиапазонное уравнение состояния воды и пара. Метод построения // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46. № 2. С. 206-218.

8. Баутин С.П., Дерябин С.Л. Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.

9. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М., 1950. 428 с.

10. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 830 с.

REFERENCES

1. Khakimzianov, G.S., Shokin, Iu.I., Barakhnin, V.B., Shokina, N.Iu. *Chislennoe modelirovanie techenii zhidkosti s poverkhnostnymi volnami* [Numerical simulation of fluid flows with surface waves]. Novosibirsk, 2001. 394 p. (in Russian).

2. Ovsiannikov, L.V. *Lektsii po osnovam gazovoi dinamiki* [Lectures on the basics of gas dynamics]. Izhevsk, 2003. 336 p. (in Russian).

3. Kovenia, V.M., Ianenko, N.N. *Metod rasshchepleniia v zadachakh gazovoi dinamiki* [The splitting method in the problems of gas dynamics]. Novosibirsk, 1983. 319 p. (in Russian).

4. Bautin, S.P. *Kharakteristicheskaia zadacha Koshi i ee prilozheniia v gazovoi dinamike* [Characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics]. Novosibirsk: Nauka, 2009. 368 p. (in Russian).

5. Bautin, S.P., Deriabin, S.L., Sommer, A.F., Khakimzianov, G.S. Investigation of solutions of the shallow water equations in the neighborhood of the moving line edge. *Vychislitel'nye tekhnologii — Computational Technologies*. 2010. V. 15. № 6. Pp. 19-41. (in Russian).

6. Fedotova, Z.I., Khakimzianov, G.S. Non-linear dispersive equations of shallow water on the unsteady bottom. *Vychislitel'nye tekhnologii — Computational Technologies*. 2008. V. 13. № 4. Pp. 114-126. (in Russian).

7. Nigmatullin, R.I., Bolotnova, R.Kh. Wide-range equation of state for water and steam. Method of constructing. *Teplofizika vysokikh temperatur — Thermophysics of high temperatures*. 2008. V. 46. № 2. Pp. 206-218. (in Russian).

8. Bautin, S.P., Deriabin, S.L. *Matematicheskoe modelirovanie istecheniia ideal'nogo gaza v vakuum* [Mathematical modeling of the ideal gas outflow into vacuum]. Novosibirsk: Nauka, 2005. 390 p. (in Russian).

9. Rashevskii, P.K. *Kurs differentsial'noi geometrii* [A course of differential geometry]. Moscow, 1950. 428 p. (in Russian).

10. Kurant, R. *Uravneniia s chastnymi proizvodnymi* [Partial differential equations]. Moscow, 1964. 830 p. (in Russian).

Авторы публикации

Дерябин Сергей Львович — профессор кафедры “Высшая и прикладная математика” Уральского государственного университета путей сообщения (Екатеринбург), доктор физико-математических наук

Мезенцев Алексей Владимирович — старший преподаватель кафедры “Высшая и прикладная математика” Уральского государственного университета путей сообщения (Екатеринбург)

Authors of the publication

Sergey L. Deryabin — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Ural State University of Railway Transport (Ekaterinburg)

Alexey V. Mezentsev — Senior Lecturer, Department of Higher and Applied Mathematics, Ural State University of Railway Transport (Ekaterinburg)